Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Merkwissen

Du weißt bereits, dass man Produkte aus lauter gleichen Faktoren auch als Potenz schreiben kann.
Diese Schreibweise gilt auch für **reelle Zahlen** a als Basis:
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}}.$

Exponent
2^5
Basis

Es gilt weiterhin: $\mathbf{a^1 = a}$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Um Potenzen für ganzzahlige Exponenten zu erhalten, definiert man $a^0 = 1$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $n \in \mathbb{N}$.
Teilt man also a^n schrittweise durch a, erhält man $a^{n-1}, a^{n-2}, \ldots, a^2, a^1, a^0, a^{-1}, a^{-2}, \ldots$

Rechengesetze für Potenzen ($a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Q}$) mit …

gleicher Basis:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

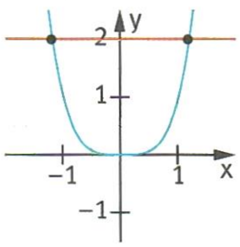
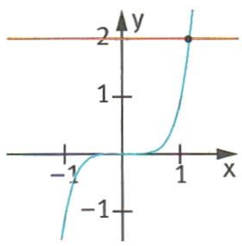
gleichem Exponenten:

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\qquad$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Rechengesetze zum Potenzieren von Potenzen:
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Potenzgleichungen sind Gleichungen der Form $x^n = b$, wobei n eine natürliche Zahl größer 1 ist. Beispiele für Potenzgleichungen:
$x^3 = 27$; $x^7 = 1234$; $x^4 = \frac{81}{256}$.
Potenzgleichungen können auf verschiedene Arten gelöst werden:

1 **grafisch**: Die Lösungen sind Schnittpunkte der Graphen von $f(x) = x^n$ und $g(x) = b$.

<table>
<tr><th colspan="2">n gerade</th><th colspan="2">n ungerade</th></tr>
<tr><td>Beispiel: $x^4 = 2$
</td><td>Lösungen:
$x_1 \approx 1{,}2$
$x_2 \approx -1{,}2$</td><td>Beispiel: $x^5 = 2$
</td><td>Lösung:
$x \approx 1{,}1$</td></tr>
</table>

2 **rechnerisch**: Auflösen der Gleichung durch Ziehen der n-ten Wurzel.

3 **systematisches Probieren**: Systematisches Einsetzen für x, bis eine Lösung gefunden ist.

Eine Potenzgleichung der Form $x^n = b$ kann zwei Lösungen, genau eine Lösung oder keine Lösung besitzen.

MERKWISSEN

Die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt[n]{a}$, die **n-te Wurzel** aus a. Mit anderen Worten:
$\sqrt[n]{a}$ ist diejenige nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz gleich a ist.

Das Potenzieren (einer nichtnegativen Zahl) mit n und das Ziehen der n-ten Wurzel heben sich auf. Somit ist folgende Festlegung sinnvoll: $\mathbf{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$.

Steht die m-te Potenz ($m \in \mathbb{Z}$) von $a \in \mathbb{R}_0^+$ unter der n-ten Wurzel ($n \in \mathbb{N}$), so gilt: $\mathbf{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$.

Wurzelgesetze

Für alle reellen Zahlen a, b mit $a \geqq 0$; $b > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

1 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ 2 $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$ 3 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Für $a \geqq 0$; $n \in \mathbb{N}$; $m \in \mathbb{Z}$ gilt: 4 $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$

MERKWISSEN

Ist der Exponent gesucht, so ist die **Umkehrung des Potenzierens** das **Logarithmieren.**
Die Gleichung $b^c = a$ mit $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $a \in \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R}$ lässt sich umformen zu $\log_b a = c$ (sprich: „Der Logarithmus von a zur Basis b ist c“)

$$\begin{array}{ccc} & b^c = a & \\ \swarrow\!\!\nearrow & & \nwarrow\!\!\searrow \\ b = \sqrt[c]{a} & \longleftrightarrow & c = \log_b a \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \text{Potenz} & \\ \swarrow\!\!\nearrow & & \nwarrow\!\!\searrow \\ \text{Wurzel} & \longleftrightarrow & \text{Logarithmus} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 2^3 = 8 & \\ \swarrow\!\!\nearrow & & \nwarrow\!\!\searrow \\ 2 = \sqrt[3]{8} & \longleftrightarrow & 3 = \log_2 8 \end{array}$$

Für das Rechnen mit Logarithmen gilt ($a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $p, q \in \mathbb{R}^+$; $r \in \mathbb{R}$):
- Logarithmus eines Produktes: $\log_b (p \cdot q) = \log_b p + \log_b q$
- Logarithmus eines Quotienten: $\log_b \left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q$
- Logarithmus einer Potenz: $\log_b (p^r) = r \cdot \log_b p$
- Wechsel der Basis: $\log_b a = \frac{\log_p a}{\log_p b}$ insbesondere: $\log_b a = \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}$

Häufiger Logarithmus:
$\log_{10} x = \lg x$
(logarithmus generalis)

Beachte:
$b^1 = 1 \Rightarrow \log_b b = 1$
$b^0 = 1 \Rightarrow \log_b 1 = 0$
$b^{-1} = \frac{1}{b} \Rightarrow \log_b \frac{1}{b} = -1$

$\log_b a = \frac{\lg a}{\lg b}$ ist besonders praktisch für den Taschenrechner.